

Fiche 4

Calcul de déterminants

Objectif : A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de (d') :

- calculer les déterminants
- calculer l'inverse d'une matrice.

4.1 Introduction

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Dans certaines situations pratiques (comme par exemple la résolution d'un système d'équations linéaires que nous verrons dans la suite du cours), il est nécessaire de déterminer l'**inverse** de A c'est-à-dire la matrice B carrée d'ordre n telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Si une telle matrice B existe, elle est unique et on dit alors que A est **inversible**. La matrice B est alors notée $B = A^{-1}$ et appelée **inverse** de A .

Le calcul de déterminants permet de déterminer si une matrice carrée A est inversible, et le cas échéant, fournit une méthode pratique de calcul de son inverse A^{-1} .

4.2 Déterminants d'ordres 2 et 3

4.2.1 Déterminants d'ordre 2

Définition 4.1 Soient a, b, c, d des réels et A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est le **nombre réel** noté

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

et défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 4.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-3 \times 2) = 4 - (-6) = 10.$$

4.2.2 Déterminants d'ordre 3

Définition 4.2 Soient a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels et A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est le **nombre réel** noté

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

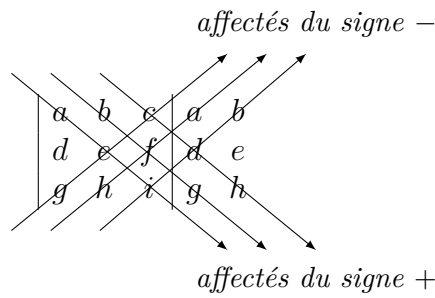
et défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb. \quad (4.1)$$

Contrairement aux déterminants d'ordre 2, la formule (4.1) d'un déterminant d'ordre 3 n'est pas aisée à retenir en mémoire et l'on ne devrait d'ailleurs jamais chercher à retenir une telle formule. Pour retrouver cette formule aisément, on utilise plutôt la **Règle de Sarrus** qui est un procédé visuel portant le nom du mathématicien français Pierre Frédéric SARRUS. Il est nécessaire de préciser que ladite règle **n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3**.

Règle de Sarrus. Soit Δ un déterminant d'ordre 3.

- 1) Supposons que l'on écrive les 3 colonnes du déterminant puis on répète à droite les deux premières colonnes.
- 2) La valeur de Δ est obtenue en effectuant le produit des termes pour chacune des 6 diagonales qui apparaissent puis en les ajoutant en affectant le signe $+$ si la diagonale est descendante et le signe $-$ si elle est ascendante.



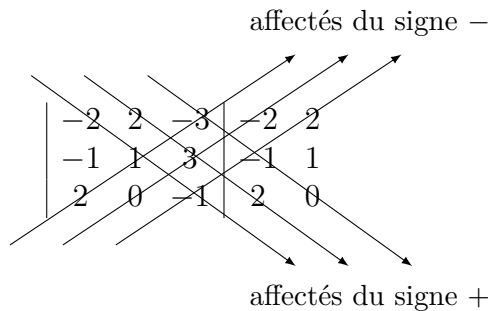
c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Exemple 4.2 Calculons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

en utilisant la règle de Sarrus. Le procédé visuel est le suivant :



On en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta = & (-2) \times 1 \times (-1) + 2 \times 3 \times 2 + (-3) \times (-1) \times 0 \\ & - 2 \times 1 \times (-3) - 0 \times 3 \times (-2) - (-1) \times (-1) \times 2 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 + 12 + 0 + 6 + 0 - 2 \\ &= 18. \end{aligned}$$

4.3 Déterminants d'ordre quelconque

Les règles de calcul présentées dans cette section sont valables pour tous les déterminants quelque soit l'ordre, y compris les déterminants d'ordres 2 et 3.

4.3.1 Déterminant des matrices diagonales et triangulaires

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Exemple 4.3

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

4.3.2 Développement suivant une rangée

Le terme **rangée** désigne une ligne ou une colonne.

4.3.2.1 Notion de cofacteur

Définition 4.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On appelle **mineur** du terme a_{ij} , noté Δ_{ij} , le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de A :

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- On appelle **cofacteur** du terme a_{ij} la quantité

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Exemple 4.4 Le cofacteur de a_{11} dans la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est

$$\text{cof}(a_{11}) = \text{cof}(-2) = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

4.3.2.2 Développement du déterminant suivant une rangée

Théorème 4.1 Soit A une matrice carrée d'ordre n .

- 1) Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ un numéro de ligne de A et $a_{i1}, \dots, a_{in}$ les éléments de cette ligne. En multipliant chaque élément par son cofacteur puis en sommant, on obtient le déterminant de A . C'est-à-dire,

$$\det(A) = a_{i1}\text{cof}(a_{i1}) + \dots + a_{in}\text{cof}(a_{in}). \quad (4.2)$$

- 2) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ un numéro de colonne de A et $a_{1j}, \dots, a_{nj}$ les éléments de cette colonne. En multipliant chaque élément par son cofacteur puis en sommant, on obtient aussi le déterminant de A . C'est-à-dire,

$$\det(A) = a_{1j}\text{cof}(a_{1j}) + \dots + a_{nj}\text{cof}(a_{nj}). \quad (4.3)$$

La formule (4.2) est appelée formule de **développement de $\det(A)$ suivant la ligne i** et la formule (4.3) est appelée formule de **développement de $\det(A)$ suivant la colonne j** . Elles traduisent le fait que pour calculer un déterminant Δ , on peut choisir une ligne ou une colonne de Δ et obtenir la valeur de Δ comme la somme des produits de chaque élément (de la ligne ou colonne choisie) par son cofacteur.

Quelque soit la ligne ou la colonne choisie pour le développement du déterminant, si les calculs sont corrects, on trouvera toujours la même réponse. Toutefois, pour simplifier les calculs, il est préférable de choisir, s'il y en a, les lignes ou colonnes qui contiennent beaucoup de 0.

Exemple 4.5

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- En développant suivant la 3^e ligne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \times \text{cof}(2) + 0 \times \text{cof}(0) + (-1) \times \text{cof}(-1) \\ &= 2 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 1 \times 9 + 0 + 0 \\ &= 18. \end{aligned}$$

- En développant suivant la 2^e colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \times \text{cof}(2) + 1 \times \text{cof}(1) + 0 \times \text{cof}(0) \\ &= 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2 \times (-1) \times (-5) + 1 \times 1 \times 8 + 0 \\ &= 18. \end{aligned}$$

Bien entendu, on trouve la même réponse.

4.3.3 Opérations élémentaires

4.3.3.1 Définition

Définition 4.4 Une **opération élémentaire** est une des trois manipulations suivantes :

- échange de deux colonnes (ou de deux lignes),
- multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un nombre non nul,
- ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes (ou ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes).

A chaque opération élémentaire correspond une notation. Dans l'exemple suivant, nous donnons quelques opérations élémentaires, leurs notations respectives et le résultat obtenu sur un déterminant d'ordre 3.

Exemple 4.6 Soit Δ le déterminant défini par :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Opération	Notation	Résultat sur Δ
Multiplier la ligne 2 par -3	$L_2 \leftarrow -3L_2$	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{-9} \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
Ajouter la colonne 2 à la colonne 1	$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 1 & 3 \\ \mathbf{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$
Echange des première et troisième lignes	$L_1 \leftrightarrow L_3$	$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

NB : les changements figurent en gras.

Remarque 4.1 Dans les notations $L_2 \leftarrow -3L_2$ et $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, le symbole " $\leftarrow$ " désigne une affectation c'est-à-dire qu'il indique que le résultat de l'expression à droite vient remplacer la valeur à gauche. Dans l'expression $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, il est possible de se demander si l'on aurait pas pu simplement écrire $C_1 + C_2$. Dans ce cas, $C_1 + C_2$ indique seulement qu'un calcul est fait mais l'on ne sait pas dans quelle colonne sera stocké le résultat de ce calcul. Ecrire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ est bien plus complet car cela indique que l'on fait la somme de C_1 et C_2 et que le résultat est stocké dans C_1 .

4.3.3.2 Effet des opérations élémentaires sur le déterminant

Proposition 4.1

- 1) On **ne change pas** la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes (ou en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes).
- 2) Si on échange deux lignes ou deux colonnes, la valeur du déterminant est multipliée par (-1) .
- 3) Si on multiplie ou factorise une ligne ou une colonne par un réel λ , le déterminant est lui aussi multiplié ou factorisé par λ .

Nous donnons une illustration dans l'exemple suivant :

Exemple 4.7 Considérons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Nous allons voir les effets des trois types d'opérations élémentaires sur la valeur de Δ .

- 1) Opération élémentaire : $C_1 \leftarrow C_1 + 100C_2$ (ajout à la colonne C_1 d'une combinaison linéaire des autres c'est-à-dire d'une combinaison linéaire de C_2).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 201 & 2 \\ 403 & 4 \end{vmatrix} = 804 - 806 = -2 = \Delta.$$

On retrouve la valeur de Δ .

- 2) Opération élémentaire : $L_1 \leftrightarrow L_2$ (échange des lignes 1 et 2).

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 = -\Delta.$$

On constate que Δ est multiplié par -1 .

3) Opération élémentaire : $L_1 \leftarrow 100L_1$ (multiplication de L_1 par 100).

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -200 = 100 \times \Delta.$$

On constate que Δ est multiplié par 100.

Exercice d'application 4.1 En utilisant successivement les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, résoudre l'équation $P(x) = 0$ où

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix}.$$

►►► *Indications* : En faisant, $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on trouve

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+6 & 3 & 3 \\ x+6 & x & 3 \\ x+6 & 3 & x \end{vmatrix}.$$

En faisant maintenant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on trouve

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+6 & 3 & 3 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}.$$

Cette dernière forme étant triangulaire, on déduit que

$$P(x) = (x+6)(x-3)(x-3).$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{-6, 3\}$.

◇

4.3.4 Quelle méthode choisir ?

La méthode de développement suivant une rangée et celle des opérations élémentaires se complètent et peuvent s'appliquer sur n'importe quel déterminant. Face à un déterminant, il faut choisir la méthode qui permettra un calcul plus aisé. Lorsque le déterminant est d'ordre supérieur ou égal à 4 ou bien lorsque l'on désire obtenir le déterminant sous une forme factorisée, il est préférable d'utiliser les opérations élémentaires pour mettre le déterminant sous une forme plus aisée à calculer avant d'appliquer la méthode de développement suivant une rangée. Dans certains cas, les opérations élémentaires permettent même d'avoir une forme triangulaire du déterminant, ce qui rend encore plus aisé le calcul.

4.3.5 Propriétés

Proposition 4.2 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- 1) $\det(A^T) = \det(A)$.
- 2) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
- 3) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exercice d'application 4.2 On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que :

- 1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- 2) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
- 3) $\det(3A) = 3^2 \det(A)$.

►►► *Indications* : On a : $\det(A) = -7$, $\det(B) = -12$,

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}, \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 1) $\det(AB) = 84$ et $\det(A)\det(B) = 84$.
- 2) $\det(A+B) = -36$ et $\det(A) + \det(B) = -19$.
- 3) $\det(3A) = -63$ et $3^2 \det(A) = 9 \det(A) = -63$.

◇

4.4 Application à l'inversion d'une matrice

Proposition 4.3 (Méthode des cofacteurs) Une matrice carrée A est inversible si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T \tag{4.4}$$

avec $\text{com}(A)$ la comatrice (ou matrice des cofacteurs) de A .

Exercice d'application 4.3 Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer A^{-1} .

►►► *Indications* : On vérifie que $\det(A) = 5 \neq 0$ donc A est inversible. Calculons la comatrice :

- Ligne 1, colonne 1

$$\text{cof}(a_{11}) = \text{cof}(1) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

- Ligne 1, colonne 2

$$\text{cof}(a_{12}) = \text{cof}(2) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3.$$

- Ligne 1, colonne 3

$$\text{cof}(a_{13}) = \text{cof}(-2) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

- Ligne 2, colonne 1

$$\text{cof}(a_{21}) = \text{cof}(1) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4.$$

- Ligne 2, colonne 2

$$\text{cof}(a_{22}) = \text{cof}(1) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.$$

- Ligne 2, colonne 3

$$\text{cof}(a_{23}) = \text{cof}(0) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

- Ligne 3, colonne 1

$$\text{cof}(a_{31}) = \text{cof}(2) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

- Ligne 3, colonne 2

$$\text{cof}(a_{32}) = \text{cof}(1) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

- Ligne 3, colonne 3

$$\text{cof}(a_{33}) = \text{cof}(-3) = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

On donc a

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

◇